UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO EN CAYEY
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA–FÍSICA
XXVII OLIMPIADAS DE CÁLCULO 2003

Número: ____________________

Instrucciones:

1. La resolución DEBE INCLUIR todos los procedimientos para obtener la solución. Problemas donde no aparezca el procedimiento, podrán no acreditarse. Cualquier explicación verbal que aclare su solución debería ser incluida.

2. Se autoriza el uso de calculadoras electrónicas del tipo TI–83, TI–85 o TI–86 o equivalentes. No se autoriza el uso de calculadoras del tipo TI–89, TI–92 o equivalentes.

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
Total	

1. Hallar la pendiente de la línea tangente a la gráfica de

$$f(x) = \cos^2(\frac{x-1}{x+1}) + \arctan(\frac{x-1}{x+1}) + \text{sen}^2(\frac{x-1}{x+1})$$

en el punto donde $x = 1$.

2. Hallar el área del triángulo determinado por el eje de x; y, la línea tangente y la línea normal (perpendicular a la tangente) a la gráfica de $y = \sqrt{x}$ en el punto (x_0, y_0)

3. $I = \displaystyle\int \frac{3\cos(x)}{\text{sen}^2(x) + \text{sen}(x) - 2}\, dx =.$

4. Evaluar I, cuando $I = \int x^5\sqrt{1-x^3}\, dx$.

5. Probar que entre todos los triángulos con una base y área dadas, aquel que tiene el menor perímetro es el triángulo ísosceles.

6. $I = \displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\, dx$

RAHT 2003

7. (a) Pruebe que:

$$I = \int \cos^n(x)\, dx = \frac{\cos^{n-1}\text{sen}(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\, dx$$

   (b) Usando la fórmula anterior, probar que cuando n es impar:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n(x) = (\frac{2}{3})(\frac{4}{5})(\frac{5}{7})\dots(\frac{n-1}{n})$$

8. Usar la desigualdad

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^9} < \frac{1}{x^3-1} < \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6} + \frac{2}{x^9},$$

que es válida para todo $x \geq 2$, para obtener una aproximación al valor de

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3-1}$$

Bono: Probar la desigualdad.

9. Probar que la integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^p}\, dx$$

converge para todo $p > 1$.