UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO EN CAYEY
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA–FÍSICA
XXV OLIMPIADAS DE CÁLCULO 2001
SOLUCIONARIO

1. $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$.

   Resolución: Sea $u = \sqrt{1+x}$. Entonces, $u^2 - 1 = x$; luego $2udu = dx$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} \\
\implies &= \int \frac{2u\,du}{(u^2-1)u} \\
\implies &= \int \frac{2du}{u^2-1} \\
\implies &= \int \frac{du}{u-1} - \frac{du}{u+1} \\
\implies &= ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C \\
\implies &= \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C
\end{aligned}
$$

2. Probar que la función $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ no tiene ni máximos ni mínimos locales.

   Resolución 1: Nótese que f está definida para todos los números reales. Se tiene que

$$f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} * \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}} = \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{-1}$$

   De donde,

$$f'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

   La derivada existe en todos los reales, por lo que puntos extremos (máximos o mínimos) de f ocurrirán donde $f'(x) = 0$. Pero,

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \iff x^2 = 1 + x^2 \iff 0 = 1.$$

   Por lo que no hay tales valores. *Resolución 2:* Derivando directamente, y simplificando algebraicamente se obtiene una fracción con numerador 1.

3. Hallar el valor de a positivo tal que

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a+|x|}\, dx \approx 171$$

Resolución: Como $|-x| = |x|$ se tiene que $I = 2\int_0^a \sqrt{a+x}\, dx$. Poniendo $u = a + x$ se tiene entonces que:

$$\begin{array}{rcl} I & = & 2\displaystyle\int_a^{2a} u^{1/2}\, du \\ \Longrightarrow \quad & = & 2\dfrac{2}{3}u^{3/2}\Big|_a^{2a} \\ \Longrightarrow \quad & = & \dfrac{4}{3}((2a)^{3/2} - a^{3/2}) \\ \Longrightarrow \quad & = & \dfrac{4}{3}(2^{3/2} - 1)a^{3/2} \end{array}$$

Por lo tanto,

$$I \approx 171 \iff \frac{4}{3}(2^{3/2}-1)a^{3/2} \approx 171 \iff a \approx \left(\frac{171 * 3}{4(2^{3/2}-1)}\right)^{2/3} \approx 17.008$$

4. Probar que punto medio del segmento de la tangente a la hipérbola $y = \dfrac{10}{x}$ que está contenido entre los ejes de coordenadas, coincide con el punto de tangencia.

Resolución: Sea AB el segmento donde A está en el eje x y B esta en el eje y. Sea $C = (x_0, y_0)$ el punto de tangencia. Se tiene entonces que $y_0 = 10/x_0$ y que $y'(x_0) = -10/x_0^2$.

Por lo tanto, la ecuación de la línea $\ell_{A,B}$, tangente a la hipérbola en C será:

$$y = y_0 + m(x - x_0) = \frac{10}{x_0} - \frac{10}{x_0^2}(x - x_0).$$

Calculemos el punto de corte con el eje de x,

$$\begin{array}{rrcl} & 0 & = & \dfrac{10}{x_0} - \dfrac{10}{x_0^2}(x - x_0) \\ \Longrightarrow & \dfrac{10}{x_0^2}(x - x_0) & = & \frac{10}{x_0} \\ \Longrightarrow & \dfrac{1}{x_0}(x - x_0) & = & 1 \\ \Longrightarrow & x - x_0 & = & x_0 \\ \Longrightarrow & x & = & 2x_0 \end{array}$$

Luego, $A = (2x_0, 0)$.

Calculemos ahora el punto de corte con el eje y.

$$\begin{aligned} y &= \frac{10}{x_0} - \frac{10}{x_0^2}(0 - x_0) \\ \Longrightarrow \quad y &= \frac{10}{x_0} + \frac{10}{x_0} = 2y_0 \end{aligned}$$

Luego $B = (0, 2y_0)$. Claramente, el punto medio entre A y B, (que es igual a $(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_a + y_B}{2})$) coincide con C.

5. $I = \int \frac{dx}{1 + e^x} =$

Resolución 1:

$$I = \int \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x}\, dx = \int (1 - \frac{e^x}{1 + e^x})\, dx = x - \ln(1 + e^x) + C.$$

Resolución 2: Sea $u = 1 + e^x$ entonces $du = e^x dx = (u - 1)dx$. Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{(u-1)u}\, dx \\ &= \int (\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u})\, dx \\ &= \ln|u - 1| - \ln|u| + C \\ &= \ln(e^x) - \ln(1 + e^x) + C \\ &= x - \ln(1 + e^x) + C \end{aligned}$$

Resolución 3:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^{-x}\, dx}{e^{-x}(1 + e^x)} = \int \frac{e^{-x}\, dx}{e^{-x} + 1} \\ &= -\ln(e^{-x} + 1) + C = -\ln(\frac{e^x(e^{-x} + 1)}{e^x}) + C \\ &= -\ln(1 + e^x) + \ln(e^x) + C = x - \ln(1 + e^x) + C. \end{aligned}$$

6. Evaluar $I = \int_1^\infty \frac{(-1)^{u(x)+1}}{2^{u(x)-1}}\, dx$, donde $u(x)$ es la parte entera de x, o sea, el mayor número entero menor o igual a x.

Resolución: Si n es un número entero, para todo x tal que $n \leq x < n + 1$ se tiene que $u(x) = n$ y por lo tanto

$$\frac{1}{2^{u(x)-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

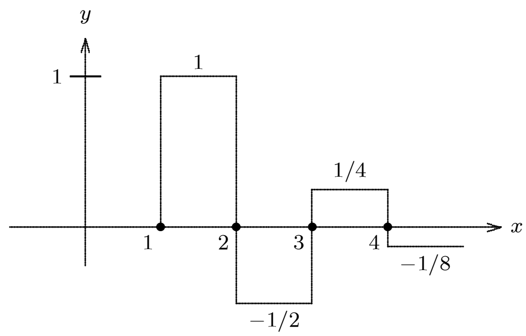

Figura 1: Problema 6

Por otra parte, nótese que

$$(-1)^{u(x)+1} = (-1)^{u(x)-1} = (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } n \text{ es impar} \\ -1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por lo tanto la gráfica de $y = \dfrac{(-1)^{u(x)-1}}{2^{u(x)-1}}$ será como la ilustrada en la figura 1.

Por lo tanto, $I = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$. La serie que allí aparece es una serie geométrica de razón $-1/2$ Luego,

$$I = 1\frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{2}{3}.$$

7. $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x (\text{sen}(t) - t)\, dx}{x^4} = .$

Resolución: La función del numerador tiene valor 0 cuando x tiende a cero, al igual que el denominador. Por lo tanto, aplicaremos la regla de L'Hôpital para computar el límite. De hecho la aplicaremos varias veces.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (\text{sen}(t) - t)\, dx}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x) - x}{4x^3} && \text{Por Teorema fundamental del Cálculo y RH} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{12x^2} && \text{RH} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen}(x)}{24x} && \text{RH} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{24} = -\frac{1}{24}. \end{aligned}$$

8. Probar que:

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2}{(2n+1)a}\left(x^n\sqrt{ax+b} - nb\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}}\,dx\right)$$

Resolución: Recordemos que $\displaystyle\int f(x)\,dx = g(x) \iff f(x) = g'(x)$. Llamando $g(x)$ a la expresión de la derecha en la igualdad que queremos probar, se tiene que:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{2}{(2n+1)a}\left[nx^{n-1}\sqrt{ax+b} + x^n\frac{a}{2\sqrt{ax+b}} - nb\frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}}\right] \\
&= \frac{2}{(2n+1)a*2\sqrt{ax+b}}\left[2nx^{n-1}(ax+b) + ax^n - 2bnx^{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{(2n+1)a\sqrt{ax+b}}\left[2anx^n + 2bnx^{n-1} + ax^n - 2bnx^{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{(2n+1)a\sqrt{ax+b}}[(2n+1)ax^n] \\
&= \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}}
\end{aligned}$$

Lo que prueba lo pedido.

9. Hallar $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[1 - \frac{2i}{n} + (\frac{2i}{n})^2\right]\frac{2}{n}$.

Resolución: Sea $f(x) = 1-x+x^2$ y consideremos la integral $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)dx$. Usando sumas de Riemann para computar esa integral, se tiene que

$$\int_0^2 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

para una adecuada partición de $[0..2]$.

Dividiendo el intervalo en n partes iguales, se tiene que $\Delta x_i = \dfrac{2}{n}$. Tomando $x_1 = 2/n$, $x_2 = 2*2/n$, $\ldots$, $x_i = i*2/n, \ldots$ se tiene poniendo $x_i^* = x_i$ que

$$\int_0^2 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(1-(\frac{2i}{n}) + (\frac{2i}{n})^2) * \frac{2}{n}$$

O sea, que el límite pedido, no es más que la integral de la izquierda. Como

$$\int_0^2 (1-x+x^2)\,dx = (x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2 = \frac{8}{3};$$

se tiene que el valor del límite es 8/3.

10. Hallar una fómula para el valor de la suma

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

Resolución: Sea $f(x)$ la suma pedida. Claramente, $f(x) = g'(x)$ donde

$$g(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

$g(x)$ es una sucesión geométrica de razón x y término inicial x, luego

$$g(x) = x\frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}$$

de donde

$$f(x) = g'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$