UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
COLEGIO UNIVERSITARIO DE CAYEY
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA–FÍSICA
Solucionario XXIV OLIMPIADAS 2000

1. Hallar la ecuación de la tangente a la gráfica de $y = (\frac{x+1}{x-1})^2$ en el punto donde $x = 0$.

   Resolución: $y = u^2$ con $u = \frac{x+1}{x-1}$. Por lo tanto, $y' = 2uu'$, donde

   $$u' = (\frac{x+1}{x-1})' = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

   Como $u(0) = -1$ y $u'(0) = -2$, se tiene que $y(0) = (u(0))^2 = 1$ y $y'(0) = 2u(0)u'(0) = 2(-1)(-2) = -4$. Por lo tanto, la ecuación de la línea tangente será:

   $$y = 1 + (-4)(x-0) = 1 - 4x.$$

2. Hallar $y'(0)$, sabiendo que $e^y + xy = e$.

   Resolución (Derivación implícita)

   $$e^y + xy = e \Longrightarrow e^y y' + y + xy' = 0$$

   de donde

   $$(e^y + x)y' = -y.(*)$$

   Si $x = 0$, la ecuación original se reduce a $e^y = e$ de donde $y = 1$. Sustituyendo $x = 0$, $y = 1$ en la relación (*), se obtiene que $ey' = -1$; o sea, $y'(0) = -1/e$.

3. $\int \frac{3\cos(x) - 2\,\mathrm{sen}\cos(x)}{1+\mathrm{sen}^2(x)}\,dx =$

   Resolución Sea I la integral. Colocando $u = \mathrm{sen}(x)$, se tiene que $du = \cos(x)dx$, y por lo tanto,

   $$\begin{aligned} I &= \int \frac{3 - 2\,\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)dx} \\ \Longrightarrow \quad I &= \int \frac{3-2u}{1+u^2}\,du \\ \Longrightarrow \quad I &= \int \frac{3}{1+u^2}\,du + \int \frac{2u}{1+u^2}\,dx \\ \Longrightarrow \quad I &= 3\arctan(u) - \ln(1+u^2) + C \end{aligned}$$

   O sea,

   $$I = 3\arctan(\mathrm{sen}(x)) - \ln(1+\mathrm{sen}^2(x)) + C$$

4. $\displaystyle\int (2xe^{-x} - x^2e^{-x})\,dx =.$

Resolución 1: Sean I la integral propuesta, $I_1 = \int xe^{-x}\,dx$, $I_2 = \int x^2e^{-x}\,dx$. Las dos integrales últimas pueden calcularse mediante integración por partes.

$$I_1 = \int xe^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x} = -xe^{-x} + e^{-x} + C$$

. $(u = x, dv = e^{-x}dx \Longrightarrow du = dx, v = -e^{-x})$

$$I_2 = \int x^2e^{-x} = -x^2e^{-x} - \int 2xe^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2I_1$$

. $(u = x^2, dv = e^{-x}dx \Longrightarrow du = 2xdx, v = -e^{-x})$ Por lo tanto,

$$I = 2I_1 - I_2 = 2I_1 - (-x^2e^{-x} + 2I_1 = -x^2e^{-x} + C$$

Resolución 2 Como $2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (x^2e^{-x})'$ se tiene que $I = x^2e^{-x} + C$.

5. $L = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt}{x^3} =.$

Resolución Cuando x tiende a 0, tanto el numerador como el denominador tienden a 0. Por lo tanto, aplicaremos la regla de L'Hôpital.

$$\frac{d}{dx}\Big(\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt\Big) = \operatorname{sen}^2(x)$$

(Teorema fundamental del Cálculo).

$$(x^3)' = 3x^2$$

. Por lo tanto,

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)cos(x) - 2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)}{6} = \frac{1}{3}.$$

Donde, aplicamos repetidas veces la regla de L'Hôpital.

6. Sea $[[x]]$ la parte entera de un número real, o sea el mayor entero menor o igual que el número x. Hallar el valor **exacto** de

$$\int_0^3 [[x^2]]\,dx$$

Resolución Por definición de parte entera, tenemos que

$$[[x^2]] = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x < \sqrt{2} \\ 2 & \text{si } \sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \\ 3 & \text{si } \sqrt{3} \le x < 2 \end{cases}$$

Luego, si $f(x) = [[x]]$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&= 0 + 1(\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 3(2 - \sqrt{3}) \\
&= 6 - \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1
\end{aligned}
$$

7. $\displaystyle\int_{-99\pi}^{99\pi} (x^2 \,\mathrm{sen}(x) + \cos(3x))\, dx =$

   Resolución Como $f(x) = x^2 \,\mathrm{sen}(x)$ es una función impar, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$. Al contrario, $\cos(3x)$ es par, por lo que:

   $$I = 2\int_0^{99\pi} \cos(3x)\, dx = 2\frac{1}{3}\int_0^{3*99\pi} \cos(u)\, du$$

   Donde $u = 3x$. Como la integral de coseno, en un periódo es nula, se tiene que

   $$I = \frac{2}{3}\int_0^{297\pi=3*99\pi} \cos = \frac{2}{3}(\int_0^{298\pi} \cos + \int_{298\pi}^{299\pi}) = \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \cos = \frac{2}{3} * 2 = \frac{4}{3}$$

8. Hallar k tal que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{1+x^2}\, dx = 1.$

   Resolución: Por simetría, $I = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{k}{1+x^2}\, dx$

   $$
   \begin{aligned}
   \int_0^{+\infty} \frac{k}{1+x^2}\, dx &= k \lim_{b\to 0} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\, dx \\
   &= k \lim_{b\to 0} \arctan(x)\Big|_0^b \\
   &= k \lim_{b\to 0} \arctan(b) \\
   &= k\pi/2
   \end{aligned}
   $$

   Luego, $I = 1$ implica que $2k\pi/2 = 1$; o sea, $k = 1/\pi$.

9. Una cisterna abierta tiene forma de antena parabólica. Si el diámetro de la cisterna es de 3 pies y su altura es 1/2 pies, hallar el volumen de la cisterna.

   Resolución La parábola que genera el plato tiene una ecuación de la forma $y = ax^2$. Con $y(3) = 1/2$. De donde resulta, $a = 1/18$. Rotando la porción del primer cuadrante, alrededor del eje de y obtenemos el volumen de la cisterna.

   $$V = \pi\int_0^{1/2} x^2\, dy = \pi\int_0^{1/2} \frac{y}{a}\, dy = \pi\frac{1}{a}\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{8a} = \frac{\pi}{144}$$