

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO EN CAYEY
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA-FÍSICA
XXVI OLIMPIADAS DE CÁLCULO

Número: _____

Instrucciones:

1. La resolución incluye los procedimientos para obtener la solución. Problemas donde no aparezca el procedimiento, podrán no acreditarse. Cualquier explicación verbal que aclare su solución debería ser incluida.
 2. Se autoriza el uso de calculadoras electrónicas del tipo TI-83, TI-85 o TI-86 o equivalentes. No se autoriza el uso de calculadoras del tipo TI-89, TI-92 o equivalentes.
-

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
Total	

1. Hallar $f'(a/b)$, cuando

$$f(x) = \ln \left(\frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}} \right)$$

2. Sea $f(x) = \frac{3x+5}{x+2}$. Hallar el punto de corte de la línea tangente a la gráfica de $y = f(x)$, en el punto del primer cuadrante donde la pendiente de la gráfica es $1/16$, con el eje de las y .

RAHT 2002

3. Hallar los valores de a, b, c tales que la gráfica de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ sea tangente a la línea $y = x$ en $(1, 1)$, y además pasa por $(-1, 0)$.

RAHT 2002

4. La rapidez v de propagación de una onda sobre la superficie de un cuerpo quieto de agua, está dado como función de la longitud de onda λ , mediante la siguiente fórmula:

$$v = \sqrt{\frac{g}{2\pi}\lambda + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}};$$

donde: g es la aceleración de gravedad, σ la tensión superficial del líquido, y ρ es la densidad del líquido.

¿Cuál es el menor valor posible de la rapidez, y, para qué valor de λ se produce?

RAHT 2002

5. Evaluar $I = \int \frac{2x-1}{\sqrt{x+3}} dx$.

RAHT 2002

6. Evaluar $I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$.

RAHT 2002

7. Resolver la ecuación diferencial $(x^2 + 4) dy - xy dx = 0$, sabiendo que $y(0) = 5$.

RAHT 2002

8. Sea $f(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$.

(a) Hallar $f(1)$.

(b) Probar, integrando por partes, que $f(n+1) = nf(n)$.

(c) Usando la fórmula anterior, hallar $f(2)$ y $f(3)$.

RAHT 2002

9. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3x}{\pi}\right)^n$. Probar que f es creciente para todo los valores de x en el interior de su dominio.

RAHT 2002

10. Sea $f(x) = x^3 - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!} + \dots$.

Hallar $f'(\pi/2)$.

RAHT 2002