UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO EN CAYEY
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA–FÍSICA
XXV OLIMPIADAS DE CÁLCULO 2001
SOLUCIONARIO

1. Hallar $f'(a/b)$, cuando

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right)$$

Resolución: $y = \ln(\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}) - \ln(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}} * \frac{b}{2\sqrt{a+bx}} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} * \frac{b}{2\sqrt{a+bx}} \\
\Longrightarrow \quad &= \frac{b}{2\sqrt{a+bx}}\left[\frac{1}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right] \\
\Longrightarrow \quad &= \frac{b}{2\sqrt{a+bx}} \frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}-\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}{a+bx-a} \\
\Longrightarrow \quad &= \frac{b}{2\sqrt{a+bx}} \frac{2\sqrt{a}}{bx} \\
\Longrightarrow \quad &= \frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{a+bx}}
\end{aligned}$$

(2 pt)

Luego,

$$y'(a/b) = \frac{b\sqrt{a}}{a\sqrt{a+a}} = \frac{b}{a\sqrt{2}}.$$

2. Sea $f(x) = \dfrac{3x+5}{x+2}$. Hallar el punto de corte de la línea tangente a la gráfica de $y = f(x)$, en el punto del primer cuadrante donde la pendiente de la gráfica es $1/16$, con el eje de las y.

Resolución: $f(x) = \dfrac{3x+5}{x+2}$ implica que $$f'(x) = \frac{3(x+2)-(3x+5)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}.$$	(2 pt)
Por lo tanto, $$f'(x) = \frac{1}{16} \iff \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{16}$$	(1 pt)
Lo que es equivalente a: $(x+2)^2 = 16$. Ahora bien, $$(x+2)^2 = 16 \iff x+2 = \pm 4 \iff x = 2 \quad \text{ó} \quad x = -6.$$	(2pt)
Como nos interesa un punto del primer cuadrante, se tiene como solución $x = 2$. Entonces, $f(2) = \dfrac{3*2+5}{x+2} = \dfrac{11}{4}$.	(2 pt)
Luego, una ecuación de la línea tangente en el punto $(2, f(2))$ será: $$y = \frac{11}{4} + \frac{1}{16}(x-2) = \frac{21}{8} + \frac{1}{16}x.$$	(1 pt)
Por lo tanto la respuesta es $(0, 21/8)$.	(2 pt)

3. Hallar los valores de a, b, c tales que la gráfica de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ sea tangente a la línea $y = x$ en $(1, 1)$, y además pasa por $(-1, 0)$.

Resolución: Tangencia en $(1, 1)$ implica que: $$y(1) = 1 \Longrightarrow 1 = a + b + c \quad (1)$$	(2 pt)
Tangencia a $y = x$ en $x = 1$ implica que $y'(1) = 1$. Como $y' = 2ax + b$, se tiene que $$1 = 2a + b \quad (2)$$	(2 pt)
Finalmente, pasar por $(-1, 0)$ implica que $y(-1) = 0$. o sea, $$0 = a - b + c \quad (3)$$.	(2 pt)
Restando (3) de (1) se obtiene que $1 = 2b$. O sea, $b = 1/2$. Sustituyendo en (2), se obtiene que $a = 1/4$. Finalmente, sustituyendo en (3), obtenemos $c = 1/2$. O sea, $$a = 1/4, \quad b = 1/2, \quad c = 1/4.$$	(4 pt)
O sea, $y = \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1) = \frac{1}{4}(x + 1)^2$.	

4. La rapidez v de propagación de una onda sobre la superficie de un cuerpo quieto de agua, está dado como función de la longitud de onda λ, mediante la siguiente fórmula:

$$v = \sqrt{\frac{g}{2\pi}\lambda + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}};$$

donde: g es la aceleración de gravedad, σ la tensión superficial del liquido, y ρ es la densidad del líquido.

¿Cuál es el menor valor posible de la rapidez, y, para qué valor de λ se produce?

Resolución $$v = \sqrt{\frac{g}{2\pi}\lambda + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}} \Longrightarrow v^2 = \frac{g}{2\pi}\lambda + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} = A\lambda + \frac{B}{\lambda}$$ con $A = \frac{g}{2\pi}$ y $B = \frac{2\pi\sigma}{\rho}$.	
Derivando en ambos lados de la última igualdad obtenemos que: $2v\frac{dv}{d\lambda} = A - B\frac{1}{\lambda^2}$	(2 pt)
Luego, para calcular puntos críticos resolvemos $\frac{dv}{d\lambda} = 0$; o sea $A - \frac{B}{\lambda^2} = 0 \iff \lambda^2 = \frac{B}{A} \iff \lambda^2 = \frac{2\pi\sigma}{\rho} * \frac{2\pi}{g} = \frac{4\pi^2\sigma}{g\rho}$ Por lo tanto, tenemos un punto crítico cuando $\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}}$.	(3pt)
(Justificación del mínimo). Cuando $\lambda \to 0$, $v \to +\infty$, y cuando $\lambda \to +\infty$, $v \to +\infty$. Por lo tanto, el único punto critico en $(0, +\infty)$ tiene que ser un punto mínimo.	(2 pt)
El correspondiente valor de v es : $$\begin{aligned} v^2 &= \frac{g}{2\pi}2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}} + \frac{2\pi\sigma}{\rho}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\rho}{\sigma}} \\ &= \sqrt{\frac{g\sigma}{\rho}} + \sqrt{\frac{g\sigma}{\rho}} \\ &= 2\sqrt{\frac{g\sigma}{\rho}} \\ v &= \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{g\sigma}{\rho}} \end{aligned}$$	(3pt)

5. Evaluar $I = \int \frac{2x-1}{\sqrt{x+3}}\,dx$.

Resolución: Colocando $u^2 = x+3$, se tiene que $x = u^2 - 3$ y $dx = 2u\,du$.	
Luego, $$\begin{aligned} I &= \int \frac{2(u^2-3)-1}{u} 2u\,du \\ \Longrightarrow \quad &= 2\int (2u^2-7)\,du \\ \Longrightarrow \quad &= 2[2\frac{1}{3}u^3 - 7u] + C \\ \Longrightarrow \quad &= \frac{4}{3}u^3 - 14u + C \end{aligned}$$	
O sea, $$I = \frac{4}{3}(x+3)^{3/2} - 14(x+3)^{1/2} + C$$.	(2 pt)

6. Evaluar $I = \int \dfrac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})}\, dx.$

Resolución:
Sea u tal que $u^6 = x$. Entonces,

$$\sqrt[6]{x} = u,\ \sqrt[3]{x} = u^2,\ \text{ y } 6u^5\, du = dx$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(u^6 + u^4 + u)6u^5}{u^6(1 + u^2)}\, du \\ &= 6\int \frac{u(u^5 + u^3 + 1)u^5}{u^6(1 + u^2)}\, du \\ &= 6\int \frac{u^5 + u^3 + 1}{1 + u^2}\, du \\ &= 6\int \frac{u^3(u^2 + 1) + 1}{1 + u^2}\, du \\ &= 6(\int u^3 + \frac{1}{1 + u^2})\, du \\ &= 6(\frac{1}{4}u^4 + \arctan(u) + C \end{aligned}$$

Por lo tanto, (2 pt)

$$I = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \arctan(\sqrt[6]{x}) + C.$$

7. Resolver la ecuación diferencial $(x^2+4)\,dy - xy\,dx = 0$, sabiendo que $y(0)=5$.

Resolución: Separando variables, se obtiene que: $$\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{x^2+4}$$	(2 pt)
Integrando, se obtiene: $$\ln\|y\| = \frac{1}{2}\ln\|x^2+4\| + C_1$$	(2 pt)
De donde, $$\ln\|y\| = \ln((x^2+4)^{1/2}) + C_1$$ lo que implica: $$y = (x^2+4)^{1/2}e^{C_1} = C(x^2+4)^{1/2}$$	(2 pt)
Evaluando en la condición inicial, se tiene que: $$5 = C(0+4)^{1/2} \Longrightarrow C = 5/2.$$	(2 pt)
Respuesta: $$y = (5/2)(x^2+4)^{1/2}$$	(2 pt)

8. Sea $f(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$.

   (a) Hallar $f(1)$.

   (b) Probar, integrando por partes, que $f(n+1) = nf(n)$.

   (c) Usando la fórmula anterior, hallar $f(2)$ y $f(3)$.

a) Hallar $f(1)$. $f(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big\vert_0^b = -\lim_{b\to\infty} -e^{-b} + 1 = 1$	(2 pt)
b) Probar, integrando por partes, que $f(n+1) = nf(n)$. $f(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}\, dx$ $\Longrightarrow \quad = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^n e^{-x}\, dx.$ Poniendo $u = x^n$, $dv = e^{-x}\, dx$ se tiene que $du = nx^{n-1}\, dx$ y $v = -e^{-x}$ Luego, $f(n+1) = \lim_{b\to\infty} (-x^n e^{-x})\Big\vert_0^b + n \int_0^b x^{n-1} e^{-x}\, dx$	(3 pt)
Como $\lim_{b\to\infty} (-x^n e^{-x})\Big\vert_0^b = \lim_{b\to\infty} (-b^n e^{-b} + 0) = 0$	(1 pt)
Y, $\lim_{b\to\infty} n \int_0^b x^{n-1} e^{-x}\, dx = n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx = nf(n)$	(1 pt)
Se concluye que: $f(n+1) = nf(n).$	(1 pt)
c) Usando la fórmula anterior, hallar $f(2)$ y $f(3)$. $f(2) = f(1+1) = 1f(1) = 1$ $f(3) = f(2+1) = 2f(2) = 2$	(2 pt)

9. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3x}{\pi})^n$. Probar que f es creciente para todo los valores de x en el interior de su dominio.

Resolución: La serie que define a la función es geométrica de razón $\frac{3x}{\pi}$ y término inicial igual a 1.	(3 pt)
Luego, $$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{3x}{\pi}} = \frac{\pi}{\pi - 3x}$$	(3 pt)
El dominio de la función está dada por $$\lvert\frac{3x}{\pi}\rvert < 1 \iff \lvert x\rvert < \frac{\pi}{3}.$$	(1 pt)
Allí, $$f'(x) = -\pi\frac{1}{(\pi - 3x)^2} * (-3) = \frac{3\pi}{(\pi - 3x)^2}.$$	(1 pt)
Como $f'(x) > 0$, concluimos que f es creciente en el dominio de f.	(2 pt)

10. Sea $f(x) = x^3 - \dfrac{x^5}{3!} + \dfrac{x^7}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+3}}{(2n+1)!} + \cdots$.

Hallar $f''(\pi/2)$.

Por inspección, $$f(x) = x^2(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots)$$	(3 pt)
Luego $$f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x)$$	(3 pt)
Por lo tanto, $$f'(x) = 2x \ \operatorname{sen}(x) + x^2 \cos(x)$$	(2 pt)
De donde, $$f'(\pi/2) = 2(\pi/2) \ \operatorname{sen}(\pi/2) = \pi.$$	(2 pt)